SMIA, Algèbre 1 2021/2022

Correction de l'examen d'algèbre

Ex1. On sait que $X \subset Y \Leftrightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$ (voir TD).

1) On a $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i$, donc $\mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \mathcal{P}(A_i)$ ceci pour tout $i \in I$, donc $\mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$.

D'autre part, soit $B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$, donc $B \subset A_i$ pour tout i, par suite, $B \subset \bigcap_{i\in I} A_i$, d'où $B \in \mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Finalement, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \subset \mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

2) On a $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, donc $\mathcal{P}(A_i) \subset \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i)$ ceci pour tout i, donc $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) \subset \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

Soit, $X = \{1,2\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_1 \cup A_2 = X$

$X \in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2)$ et $X \notin \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2)$.

Ex2. 1) • Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Puisque $R_1\{x_1, x_1\}$ et $R_2\{x_2, x_2\}$ sont vraies, alors $R\{(x_1,x_2), (x_1,x_2)\}$ est vraie.

• $R\{(x_1,x_2), (y_1,y_2)\} \Rightarrow R_1\{x_1, y_1\}$ et $R_2\{x_2, y_2\}$

$\Rightarrow R_1\{y_1, x_1\}$ et $R_2\{y_2, x_2\}$

$\Rightarrow R\{(y_1,y_2), (x_1,x_2)\}$

• $[R\{(x_1,x_2), (y_1,y_2)\}$ et $R\{(y_1,y_2), (z_1,z_2)\}] \Rightarrow [R_1\{x_1, z_1\}$ et $R_2\{x_2, z_2\}]$

$\Rightarrow R\{(x_1,x_2), (z_1,z_2)\}$

2) $$cl_R(x_1,x_2) = \{(y_1,y_2) \in E_1 \times E_2 \mid R\{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\}\}$$
$$= \{(y_1,y_2) \in E_1 \times E_2 \mid R_1\{x_1,y_1\} \text{ et } R_2\{x_2,y_2\}\}$$
$$= \{(y_1,y_2) \in E_1 \times E_2 \mid y_1 \in \bar{x}_1 \text{ et } y_2 \in \dot{x}_2\}$$
$$= \bar{x}_1 \times \dot{x}_2 .$$

Ex 3. 1) on peut écrire :

$$f \leq g \Leftrightarrow D(f) \subset D(g) \text{ et } \forall x \in D(f),\ g(x) = f(x).$$

- $f \leq f$ est claire.
- si $f \leq g$ et $g \leq f$, alors $D(f) = D(g)$ et $\forall x \in D(f)$, $g(x) = f(x)$, donc $f = g$.
- si $f \leq g \leq h$, alors $D(f) \subset D(g) \subset D(h)$ et $\forall x \in D(f)$, $h(x) = g(x) = f(x)$, donc $f \leq h$.

Ordre de $\bar{F}$ partiel ou total : Toute application $f \in \bar{F}$ prolonge $f_0 : \phi \to Y$ $(f_0 = (\phi, \phi \times Y = \phi, Y))$.

1er cas : $X = \phi$, $F = \{(\phi,\phi,Y)\}$, l'ordre est total.

2ème cas : X singleton et $Y = \phi$. F est un singleton, l'ordre est total.

3ème cas : $|X| \geq 2$ et $Y = \phi$. L'ordre est partiel.

4ème cas : X et Y sont des singletons. L'ordre est total.

5ème cas : $(|X| \geq 2$ et $Y \neq \phi)$ ou $(|Y| \geq 2$ et $X \neq \phi)$. L'ordre est partiel.

Soient $x_1 \neq x_2$, $f_1 : \{x_1\} \to Y$, $f_2 : \{x_2\} \to Y$ ne sont pas comparables

Soient $y_1 \neq y_2$, $f_1, f_2 : \{x\} \to Y$, $f_1(x) = y_1$, $f_2(x) = y_2$, f_1 et f_2 ne sont pas comparables

2) a) Soit $\forall x \in A_1 \cap A_2$, $f_1(x) = f_2(x)$ $(*)$.

Si $f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow Y$ prolonge f_1 et f_2 alors

$\forall x \in A_1 \cap A_2$, $\quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$, donc $f_1(x) = f_2(x)$.

Si $(*)$ est vrai, l'application

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in A_2 \end{cases} \quad (**)$$

prolonge f_1 et f_2.

b) La condition cherchée est $(*)$.

Une application $g : A \longrightarrow Y$ est un majorant de $\{f_1, f_2\}$ si

$A_1 \cup A_2 \subset A$ et $g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in A_2 \end{cases}$.

Si on a $(*)$, $\quad \sup(f_1, f_2) = f$.

Si $\{f_1, f_2\}$ est majorée alors $(*)$ est vraie.

3) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$: $f_i : A_i \to Y$, $(i \in I)$.

a) pour qu'il existe une application $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to Y$ prolongeant les f_i il faut et il suffit que pour tout $i \neq j$,

pour tout $x \in A_i \cap A_j$, $f_i(x) = f_j(x)$ $(***)$

b) La condition est $(***)$.